**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**По лабораторной работе № 1**

**по дисциплине «Методы оптимизации»**

Тема: **Методы безусловной минимизации функций**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 0303 |  | Болкунов В. О. |
| Преподаватель |  | Мальцева Н. В. |

Санкт-Петербург

2023

**Цели работы.**

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.

2. Исследование и объяснение полученных результатов.

**Постановка задачи.**

Минимизировать функцию с точностью до 10-5  предложенными в задании методами. Оценить скорость и порядок сходимости методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от предложенных параметров (начальной точки, величины шага, параметра а>0).

**Задание.**

Вариант 3.

Минимизировать функцию с точностью до градиентными методами – методом с дробления шага и методом наискорейшего спуска.

Оценить скорость и порядок сходимости обоих методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки, величины шага и параметра a > 0.

**Основные теоретические положения.**

В основе всех градиентных методов лежит следующий принцип вычисления релаксационной последовательности

, сами методы различаются способами вычисления коэффициента .

Рассмотрим методы предложенные в задании.

**Метод наискорейшего спуска**

На луче, построенном по направлению антиградиента из точки на k-ом шаге введём функцию зависимости целевой функции от параметра : .

Тогда минимизируя данную функцию, можно найти такой параметр , который обеспечивает наибольший спуск к минимуму целевой функции на данном шаге:

**Метод дробления шага**

Перед началом вычислений требуется выбрать константы

(обычно ). На первом шаге положим . Далее на каждом шаге перед непосредственным вычислением следующего элемента релаксационной последовательности, в зависимости от условия

выбираем коэффициент : если выражение верно значит текущий коэффициент обеспечивает спуск к минимуму и можно оставить его значение прежним (в некоторых случаях его можно увеличить); иначе если выражение не верно – значит следующий шаг не приведёт к уменьшению значения целевой функции, тогда , где такое минимальное натуральное число при котором вышеописанное неравенство выполняется.

Для оценки эффективности методов будем использовать следующие параметры– скорость и порядок сходимости.

* Порядок сходимости: , где .
* Скорость сходимости:

– геометрическая скорость сходимости, где ,

*–* квадратичная скорость сходимости, где .

**Выполнение работы.**

Построим график исследуемой функции (положим ). Полученный график представлен на рисунке 1

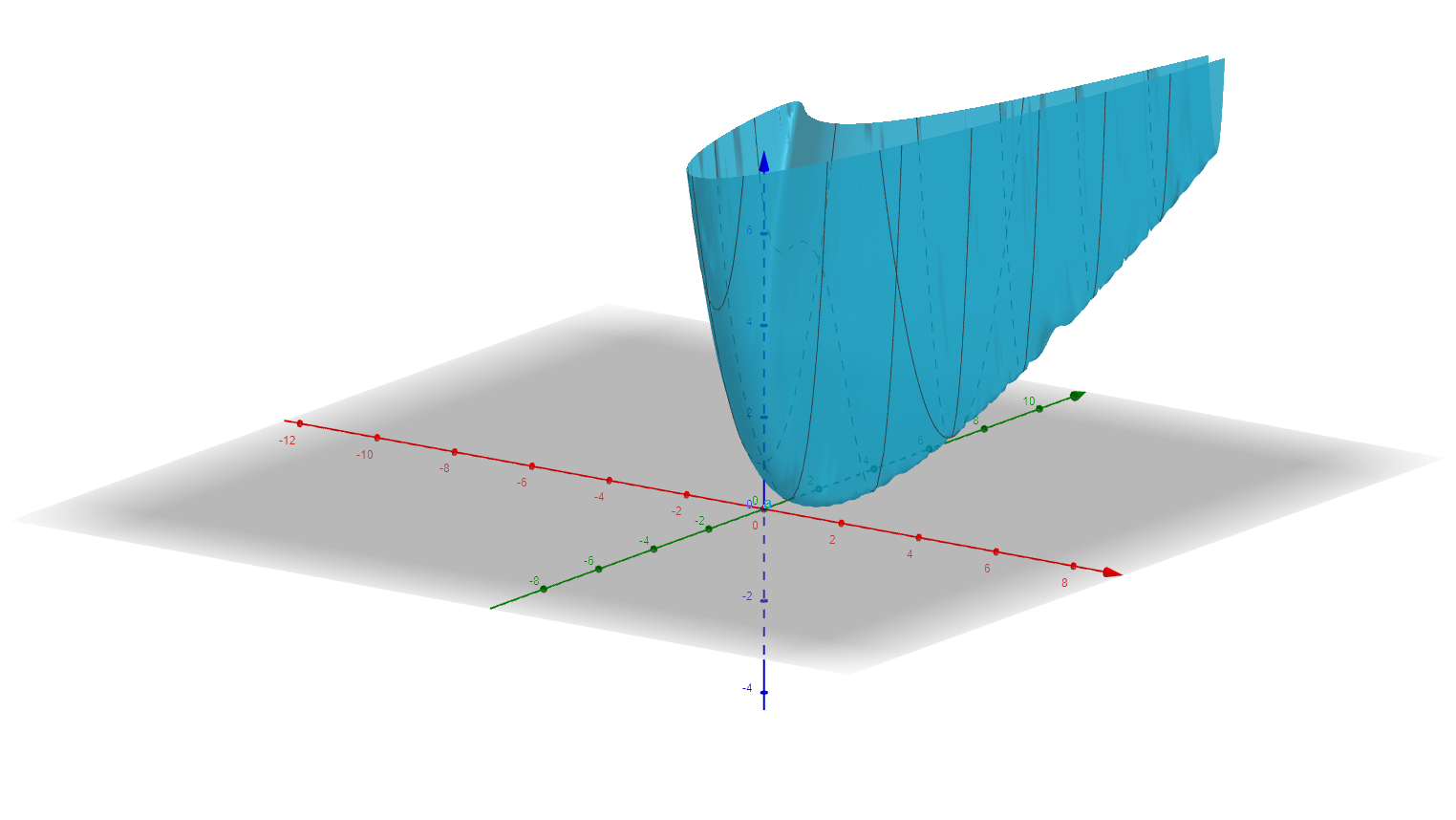


Рисунок 1 – график исследуемой функции

Аналитически можно найти минимум данной функции при любых положительных значениях *a*, минимум достигается в точке минимум самой функции равен 0. Это подтверждается и графически. Также по графику видно что в любой точке пространства антиградиент функции направлен в сторону её минимального значения, то есть точка – единственный локальный минимум, который гарантировано будет найден любым градиентным методом.

Для исследования методов были выбраны следующие значения ключевых параметров.

Параметр *a :*

Начальные точки:

Начальные длины шага:(не имеет значения для метода наискорейшего спуска)

Соответственно в программу для минимизации были внесены все комбинации данных параметров (20 вариантов).

Полученные результаты:

* Метод наискорейшего спуска

Метод сошёлся за 157 шагов

Метод сошёлся за 1100 шагов

Метод сошёлся за 19 шагов

Метод сошёлся за 55 шагов

Метод сошёлся за 7 шагов

Метод сошёлся за 45 шагов

* Метод с дроблением шага

Метод сошёлся за 1471 шаг

Метод сошёлся за 810 шагов

Метод сошёлся за 5851 шаг

Метод сошёлся за 2687 шаг

Метод сошёлся за 196 шагов

Метод сошёлся за 101 шаг

Метод сошёлся за 620 шагов

Метод сошёлся за 365 шагов

Метод сошёлся за 60 шагов

Метод сошёлся за 69 шагов

Метод сошёлся за 106 шагов

Метод сошёлся за 77 шагов

Ниже представлены протоколы работы программы для каждого варианта запуска и оценка скорости и порядка сходимости для метода наискорейшего спуска таблицы 1-6, для метода с дроблением шага 7-18 соответственно

**Метод наискорейшего спуска**

Таблица 1 – Метод наискорейшего спуска, a = 0.1, начальная точка (2, 3)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 139 | 1.016600 | 1.034222 | 0.0000281129 | 12 | 1.0176 | 0.0000281129 | 0.8917 |
| 141 | 1.015675 | 1.032301 | 0.0000250686 | 12 | 1.0185 | 0.0000250686 | 0.8915 |
| 143 | 1.014800 | 1.030349 | 0.0000223484 | 13 | 1.0160 | 0.0000223484 | 0.8912 |
| 145 | 1.013972 | 1.028769 | 0.0000199170 | 13 | 1.0168 | 0.0000199170 | 0.8913 |
| 147 | 1.013190 | 1.027149 | 0.0000177513 | 13 | 1.0166 | 0.0000177513 | 0.8907 |
| 149 | 1.012448 | 1.025612 | 0.0000158103 | 14 | 1.0164 | 0.0000158103 | 0.8905 |
| 151 | 1.011746 | 1.024161 | 0.0000140792 | 12 | 1.0160 | 0.0000140792 | 0.8910 |
| 153 | 1.011087 | 1.022799 | 0.0000125442 | 12 | 1.0158 | 0.0000125442 | 0.8905 |
| 155 | 1.010463 | 1.021508 | 0.0000111705 | 12 | 1.0155 | 0.0000111705 | 0.8908 |
| 157 | 1.009875 | 1.020294 | 0.0000099505 | 12 |  | 0.0000099505 |  |

Таблица 2 – Метод наискорейшего спуска, a = 0.1, начальная точка (-20, 13)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1037 | 0.969109 | 0.939534 | 0.0000955571 | 19 | 1.0423 | 0.0000955571 | 0.7733 |
| 1044 | 0.973136 | 0.945678 | 0.0000738978 | 12 | 1.0499 | 0.0000738978 | 0.7742 |
| 1051 | 0.976097 | 0.953047 | 0.0000572153 | 19 | 1.0384 | 0.0000572153 | 0.7751 |
| 1058 | 0.979187 | 0.957793 | 0.0000443459 | 14 | 1.0454 | 0.0000443459 | 0.7765 |
| 1065 | 0.981456 | 0.963471 | 0.0000344357 | 20 | 1.0350 | 0.0000344357 | 0.7777 |
| 1072 | 0.983825 | 0.967127 | 0.0000267791 | 12 | 1.0416 | 0.0000267791 | 0.7785 |
| 1079 | 0.985573 | 0.971517 | 0.0000208472 | 20 | 1.0322 | 0.0000208472 | 0.7794 |
| 1086 | 0.987399 | 0.974348 | 0.0000162488 | 13 | 1.0610 | 0.0000162488 | 0.7808 |
| 1093 | 0.988744 | 0.979937 | 0.0000126863 | 19 | 1.0052 | 0.0000126863 | 0.7814 |
| 1100 | 0.990158 | 1.020294 | 0.0000099128 | 12 |  | 0.0000099128 |  |

Таблица 3 – Метод наискорейшего спуска, a = 1, начальная точка (2, 3)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 11 | 1.029211 | 1.072201 | 0.0010203444 | 14 | 1.2299 | 0.0010203444 | 0.5378 |
| 12 | 1.022158 | 1.037211 | 0.0005486915 | 18 | 1.0130 | 0.0005486915 | 0.5351 |
| 13 | 1.015639 | 1.038525 | 0.0002936134 | 12 | 1.1853 | 0.0002936134 | 0.5343 |
| 14 | 1.011851 | 1.019786 | 0.0001568812 | 20 | 1.0110 | 0.0001568812 | 0.5328 |
| 15 | 1.008335 | 1.020497 | 0.0000835927 | 13 | 1.1537 | 0.0000835927 | 0.5351 |
| 16 | 1.006335 | 1.010564 | 0.0000447296 | 19 | 1.0095 | 0.0000447296 | 0.5343 |
| 17 | 1.004454 | 1.010943 | 0.0000238994 | 13 | 1.1328 | 0.0000238994 | 0.5325 |
| 18 | 1.003377 | 1.005616 | 0.0000127257 | 19 | 1.0083 | 0.0000127257 | 0.5321 |
| 19 | 1.002370 | 1.005820 | 0.0000067708 | 14 | 1.1159 | 0.0000067708 | 0.5330 |
| 20 | 1.001799 | 1.002992 | 0.0000036088 | 21 |  | 0.0000036088 |  |

Таблица 4 – Метод наискорейшего спуска, a = 1, начальная точка (-20, 13)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 34 | 0.988544 | 0.970782 | 0.0001726836 | 13 | 1.0679 | 0.0001726836 | 0.6561 |
| 37 | 0.989462 | 0.977537 | 0.0001132907 | 15 | 1.0498 | 0.0001132907 | 0.6573 |
| 40 | 0.992469 | 0.980782 | 0.0000744670 | 14 | 1.0601 | 0.0000744670 | 0.6584 |
| 43 | 0.993067 | 0.985199 | 0.0000490288 | 16 | 1.0444 | 0.0000490288 | 0.6594 |
| 46 | 0.995035 | 0.987324 | 0.0000323276 | 13 | 1.0540 | 0.0000323276 | 0.6601 |
| 49 | 0.995426 | 0.990224 | 0.0000213410 | 15 | 1.0402 | 0.0000213410 | 0.6607 |
| 52 | 0.996720 | 0.991623 | 0.0000141005 | 14 | 1.0491 | 0.0000141005 | 0.6613 |
| 55 | 0.996977 | 0.993533 | 0.0000093250 | 16 | 1.0367 | 0.0000093250 | 0.6618 |
| 58 | 0.997829 | 0.994455 | 0.0000061717 | 13 | 1.0268 | 0.0000061717 | 0.7596 |
| 60 | 0.998108 | 0.995167 | 0.0000046883 | 12 |  | 0.0000046883 |  |

Таблица 5 – Метод наискорейшего спуска, a = 10, начальная точка (2, 3)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 1.343358 | 3.046903 | 2.7222372734 | 10 | -1.5194 | 2.7222372734 | 0.1687 |
| 2 | 1.205284 | 1.258043 | 0.4593120168 | 18 | 1.1673 | 0.4593120168 | 0.1128 |
| 3 | 1.040538 | 1.270859 | 0.0517922566 | 11 | 2.6193 | 0.0517922566 | 0.1024 |
| 4 | 1.022183 | 1.025285 | 0.0053041728 | 18 | 1.0655 | 0.0053041728 | 0.0956 |
| 5 | 1.003926 | 1.026649 | 0.0005068975 | 11 | 1.6373 | 0.0005068975 | 0.0772 |
| 6 | 1.001889 | 1.001917 | 0.0000391479 | 19 | 1.0444 | 0.0000391479 | 0.0766 |
| 7 | 1.000301 | 1.002048 | 0.0000029970 | 12 | 1.3581 | 0.0000029970 | 0.0858 |
| 8 | 1.000154 | 1.000166 | 0.0000002571 | 19 | 1.0287 | 0.0000002571 | 0.0856 |
| 9 | 1.000026 | 1.000176 | 0.0000000220 | 12 | 1.2460 | 0.0000000220 | 0.1000 |
| 10 | 1.000014 | 1.000016 | 0.0000000022 | 17 |  | 0.0000000022 |  |

Таблица 6 – Метод наискорейшего спуска, a = 10, начальная точка (-20, 13)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 33 | 1.000378 | 1.035445 | 0.0012046818 | 14 | 1.1322 | 0.0012046818 | 0.4132 |
| 35 | 1.000248 | 1.022792 | 0.0004977733 | 13 | 1.1161 | 0.0004977733 | 0.4148 |
| 37 | 1.000167 | 1.014694 | 0.0002064522 | 16 | 1.1040 | 0.0002064522 | 0.4157 |
| 39 | 1.000107 | 1.009473 | 0.0000858318 | 15 | 1.0939 | 0.0000858318 | 0.4164 |
| 41 | 1.000072 | 1.006117 | 0.0000357383 | 15 | 1.0859 | 0.0000357383 | 0.4168 |
| 43 | 1.000045 | 1.003948 | 0.0000148951 | 16 | 1.0789 | 0.0000148951 | 0.4170 |
| 45 | 1.000030 | 1.002551 | 0.0000062119 | 15 | 1.0733 | 0.0000062119 | 0.4172 |
| 47 | 1.000019 | 1.001647 | 0.0000025917 | 15 | 1.0682 | 0.0000025917 | 0.4173 |
| 49 | 1.000013 | 1.001064 | 0.0000010816 | 16 | 1.0095 | 0.0000010816 | 0.6463 |
| 50 | 1.000165 | 1.000983 | 0.0000006990 | 12 |  | 0.0000006990 |  |

**Метод с дроблением шага**

Таблица 7 – Метод с дроблением шага, a = 0.1, начальная точка (2, 3), l = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1366 | 1.014264 | 1.029300 | 0.0000206696 | 1 | 1.0170 | 0.0000206696 | 0.8907 |
| 1381 | 1.013462 | 1.027641 | 0.0000184100 | 1 | 1.0167 | 0.0000184100 | 0.8905 |
| 1396 | 1.012704 | 1.026075 | 0.0000163950 | 1 | 1.0165 | 0.0000163950 | 0.8904 |
| 1411 | 1.011988 | 1.024597 | 0.0000145986 | 1 | 1.0162 | 0.0000145986 | 0.8903 |
| 1426 | 1.011311 | 1.023201 | 0.0000129973 | 1 | 1.0160 | 0.0000129973 | 0.8902 |
| 1441 | 1.010672 | 1.021884 | 0.0000115704 | 1 | 1.0157 | 0.0000115704 | 0.8901 |
| 1456 | 1.010068 | 1.020640 | 0.0000102989 | 1 | 1.0155 | 0.0000102989 | 0.8900 |
| 1471 | 1.009499 | 1.019467 | 0.0000091661 | 1 | 1.0153 | 0.0000091661 | 0.8899 |
| 1486 | 1.008961 | 1.018359 | 0.0000081571 | 1 | 1.0140 | 0.0000081571 | 0.8968 |
| 1500 | 1.008485 | 1.017382 | 0.0000073152 | 1 |  | 0.0000073152 |  |

Таблица 8 – Метод с дроблением шага, a = 0.1, начальная точка (2, 3), l = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 721 | 1.022167 | 1.046342 | 0.0000514369 | 3 | 1.0375 | 0.0000514369 | 0.8155 |
| 731 | 1.019678 | 1.041539 | 0.0000419448 | 2 | 1.0299 | 0.0000419448 | 0.8141 |
| 741 | 1.018238 | 1.037750 | 0.0000341483 | 4 | 1.0306 | 0.0000341483 | 0.8251 |
| 751 | 1.016552 | 1.034260 | 0.0000281741 | 4 | 1.0327 | 0.0000281741 | 0.8185 |
| 761 | 1.014735 | 1.030849 | 0.0000230614 | 3 | 1.0288 | 0.0000230614 | 0.8241 |
| 771 | 1.013373 | 1.027984 | 0.0000190048 | 3 | 1.0281 | 0.0000190048 | 0.8225 |
| 781 | 1.012145 | 1.025376 | 0.0000156320 | 3 | 1.0287 | 0.0000156320 | 0.8066 |
| 791 | 1.011055 | 1.022855 | 0.0000126092 | 4 | 1.0266 | 0.0000126092 | 0.8224 |
| 801 | 1.010038 | 1.020719 | 0.0000103704 | 4 | 1.0247 | 0.0000103704 | 0.8421 |
| 810 | 1.009345 | 1.018782 | 0.0000087333 | 3 |  | 0.0000087333 |  |

Таблица 9 – Метод с дроблением шага, a = 0.1, начальная точка (-20, 13), l = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 5451 | 1.040860 | 1.084991 | 0.0001695182 | 1 | 1.0799 | 0.0001695182 | 0.6893 |
| 5501 | 1.033922 | 1.070329 | 0.0001168516 | 1 | 1.0746 | 0.0001168516 | 0.6868 |
| 5551 | 1.028110 | 1.058121 | 0.0000802509 | 1 | 1.0698 | 0.0000802509 | 0.6846 |
| 5601 | 1.023258 | 1.047978 | 0.0000549423 | 1 | 1.0656 | 0.0000549423 | 0.6828 |
| 5651 | 1.019218 | 1.039569 | 0.0000375162 | 1 | 1.0618 | 0.0000375162 | 0.6813 |
| 5701 | 1.015863 | 1.032608 | 0.0000255602 | 1 | 1.0585 | 0.0000255602 | 0.6801 |
| 5751 | 1.013081 | 1.026854 | 0.0000173828 | 1 | 1.0554 | 0.0000173828 | 0.6790 |
| 5801 | 1.010779 | 1.022104 | 0.0000118032 | 1 | 1.0526 | 0.0000118032 | 0.6781 |
| 5851 | 1.008876 | 1.018186 | 0.0000080043 | 1 | 1.0491 | 0.0000080043 | 0.6827 |
| 5900 | 1.007334 | 1.015015 | 0.0000054648 | 1 |  | 0.0000054648 |  |

Таблица 10 – Метод с дроблением шага, a = 0.1, начальная точка (-20, 13), l = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 2551 | 0.919056 | 0.837313 | 0.0007092253 | 3 | 1.2207 | 0.0007092253 | 0.4521 |
| 2568 | 0.943623 | 0.888750 | 0.0003206388 | 4 | 1.1525 | 0.0003206388 | 0.5402 |
| 2585 | 0.960384 | 0.918305 | 0.0001731986 | 2 | 1.1129 | 0.0001731986 | 0.5735 |
| 2602 | 0.968502 | 0.938332 | 0.0000993273 | 2 | 1.0926 | 0.0000993273 | 0.5915 |
| 2619 | 0.976108 | 0.951493 | 0.0000587559 | 4 | 1.0823 | 0.0000587559 | 0.6266 |
| 2636 | 0.980813 | 0.962044 | 0.0000368163 | 3 | 1.0707 | 0.0000368163 | 0.6356 |
| 2653 | 0.985174 | 0.969377 | 0.0000233987 | 2 | 1.0592 | 0.0000233987 | 0.6268 |
| 2670 | 0.987890 | 0.974916 | 0.0000146655 | 2 | 1.0667 | 0.0000146655 | 0.6517 |
| 2687 | 0.990354 | 0.980298 | 0.0000095572 | 4 | 1.0460 | 0.0000095572 | 0.7036 |
| 2701 | 0.991923 | 0.983463 | 0.0000067248 | 4 |  | 0.0000067248 |  |

Таблица 11 – Метод с дроблением шага, a = 1, начальная точка (2, 3), l = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 156 | 1.009855 | 1.023861 | 0.0001135516 | 1 | 1.0473 | 0.0001135516 | 0.7085 |
| 161 | 1.008294 | 1.020071 | 0.0000804498 | 1 | 1.0452 | 0.0000804498 | 0.7080 |
| 166 | 1.006978 | 1.016880 | 0.0000569569 | 1 | 1.0433 | 0.0000569569 | 0.7076 |
| 171 | 1.005869 | 1.014192 | 0.0000403000 | 1 | 1.0415 | 0.0000403000 | 0.7072 |
| 176 | 1.004935 | 1.011931 | 0.0000284998 | 1 | 1.0399 | 0.0000284998 | 0.7069 |
| 181 | 1.004149 | 1.010028 | 0.0000201461 | 1 | 1.0385 | 0.0000201461 | 0.7066 |
| 186 | 1.003487 | 1.008427 | 0.0000142358 | 1 | 1.0370 | 0.0000142358 | 0.7064 |
| 191 | 1.002931 | 1.007081 | 0.0000100564 | 1 | 1.0357 | 0.0000100564 | 0.7062 |
| 196 | 1.002463 | 1.005950 | 0.0000071021 | 1 | 1.0276 | 0.0000071021 | 0.7570 |
| 200 | 1.002143 | 1.005176 | 0.0000053762 | 1 |  | 0.0000053762 |  |

Таблица 12 – Метод с дроблением шага, a = 1, начальная точка (2, 3), l = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 76 | 1.013635 | 1.034822 | 0.0002401734 | 4 | 1.1068 | 0.0002401734 | 0.5249 |
| 81 | 1.011131 | 1.023857 | 0.0001260673 | 3 | 1.0849 | 0.0001260673 | 0.5166 |
| 86 | 1.006938 | 1.018046 | 0.0000651254 | 4 | 1.0894 | 0.0000651254 | 0.5369 |
| 91 | 1.005899 | 1.012237 | 0.0000349651 | 3 | 1.0723 | 0.0000349651 | 0.4993 |
| 96 | 1.003534 | 1.009309 | 0.0000174568 | 4 | 1.0767 | 0.0000174568 | 0.5458 |
| 101 | 1.003085 | 1.006273 | 0.0000095271 | 3 | 1.0628 | 0.0000095271 | 0.4873 |
| 106 | 1.001804 | 1.004790 | 0.0000046425 | 4 | 1.0671 | 0.0000046425 | 0.5512 |
| 111 | 1.001600 | 1.003216 | 0.0000025588 | 3 | 1.0555 | 0.0000025588 | 0.4801 |
| 116 | 1.000923 | 1.002461 | 0.0000012286 | 4 | 1.0449 | 0.0000012286 | 0.5871 |
| 120 | 1.000706 | 1.001885 | 0.0000007213 | 4 |  | 0.0000007213 |  |

Таблица 13 – Метод с дроблением шага, a = 1, начальная точка (-20, 13), l = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 531 | 1.054374 | 1.133365 | 0.0034257295 | 1 | 1.1713 | 0.0034257295 | 0.5202 |
| 541 | 1.039161 | 1.095624 | 0.0017822355 | 1 | 1.1484 | 0.0017822355 | 0.5139 |
| 551 | 1.028042 | 1.068253 | 0.0009159320 | 1 | 1.1305 | 0.0009159320 | 0.5093 |
| 561 | 1.019995 | 1.048554 | 0.0004664541 | 1 | 1.1163 | 0.0004664541 | 0.5059 |
| 571 | 1.014213 | 1.034455 | 0.0002359702 | 1 | 1.1047 | 0.0002359702 | 0.5034 |
| 581 | 1.010080 | 1.024408 | 0.0001187967 | 1 | 1.0952 | 0.0001187967 | 0.5017 |
| 591 | 1.007138 | 1.017268 | 0.0000595991 | 1 | 1.0872 | 0.0000595991 | 0.5004 |
| 601 | 1.005048 | 1.012205 | 0.0000298259 | 1 | 1.0700 | 0.0000298259 | 0.4996 |
| 611 | 1.004568 | 1.008622 | 0.0000148997 | 1 | 1.0773 | 0.0000148997 | 0.5349 |
| 620 | 1.002609 | 1.006303 | 0.0000079695 | 1 |  | 0.0000079695 |  |

Таблица 14 – Метод с дроблением шага, a = 1, начальная точка (-20, 13), l = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 261 | 1.709232 | 3.231927 | 0.5993910642 | 4 | 0.7426 | 0.5993910642 | 0.6885 |
| 274 | 1.634854 | 2.770887 | 0.4126710925 | 5 | 0.5031 | 0.4126710925 | 0.6197 |
| 287 | 1.426355 | 2.306451 | 0.2557420562 | 3 | -3.0178 | 0.2557420562 | 0.0912 |
| 300 | 1.149418 | 1.352777 | 0.0233252332 | 4 | 1.7025 | 0.0233252332 | 0.2812 |
| 313 | 1.066433 | 1.183605 | 0.0065594266 | 4 | 1.4624 | 0.0065594266 | 0.2230 |
| 326 | 1.037582 | 1.083689 | 0.0014630085 | 4 | 1.3445 | 0.0014630085 | 0.1997 |
| 339 | 1.013776 | 1.037861 | 0.0002921800 | 3 | 1.2602 | 0.0002921800 | 0.1837 |
| 352 | 1.007151 | 1.015935 | 0.0000536649 | 4 | 1.2078 | 0.0000536649 | 0.1827 |
| 365 | 1.002762 | 1.007007 | 0.0000098047 | 4 | 1.0835 | 0.0000098047 | 0.4461 |
| 370 | 1.002023 | 1.004581 | 0.0000043734 | 4 |  | 0.0000043734 |  |

Таблица 15 – Метод с дроблением шага, a = 10, начальная точка (2, 3), l = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 34 | 1.011278 | 1.063036 | 0.0029003385 | 2 | 1.1350 | 0.0029003385 | 0.5014 |
| 37 | 1.004023 | 1.044010 | 0.0014541358 | 2 | 1.0950 | 0.0014541358 | 0.5261 |
| 40 | 1.005779 | 1.032352 | 0.0007649711 | 2 | 1.1088 | 0.0007649711 | 0.5005 |
| 43 | 1.002055 | 1.022570 | 0.0003828351 | 2 | 1.0783 | 0.0003828351 | 0.5255 |
| 46 | 1.002960 | 1.016585 | 0.0002011615 | 2 | 1.0911 | 0.0002011615 | 0.5000 |
| 49 | 1.001051 | 1.011565 | 0.0001005783 | 2 | 1.0824 | 0.0001005783 | 0.5891 |
| 52 | 1.002191 | 1.007739 | 0.0000592553 | 1 | 1.0626 | 0.0000592553 | 0.4455 |
| 55 | 1.000538 | 1.005924 | 0.0000263968 | 1 | 1.0579 | 0.0000263968 | 0.5250 |
| 58 | 1.000776 | 1.004352 | 0.0000138574 | 2 | 1.0542 | 0.0000138574 | 0.7180 |
| 60 | 1.000898 | 1.003171 | 0.0000099498 | 1 |  | 0.0000099498 |  |

Таблица 16 – Метод с дроблением шага, a = 10, начальная точка (2, 3), l = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 37 | 1.007300 | 1.065524 | 0.0031207317 | 5 | 1.1700 | 0.0031207317 | 0.4315 |
| 41 | 1.002967 | 1.041415 | 0.0013466280 | 5 | 1.1147 | 0.0013466280 | 0.4447 |
| 45 | 1.003052 | 1.028660 | 0.0005988257 | 5 | 1.1311 | 0.0005988257 | 0.4382 |
| 49 | 1.001137 | 1.018069 | 0.0002623801 | 5 | 1.0918 | 0.0002623801 | 0.4369 |
| 53 | 1.001268 | 1.012465 | 0.0001146429 | 5 | 1.1056 | 0.0001146429 | 0.4472 |
| 57 | 1.000420 | 1.007877 | 0.0000512740 | 5 | 1.0762 | 0.0000512740 | 0.4281 |
| 61 | 1.000523 | 1.005430 | 0.0000219509 | 5 | 1.0887 | 0.0000219509 | 0.4590 |
| 65 | 1.000146 | 1.003433 | 0.0000100757 | 5 | 1.0651 | 0.0000100757 | 0.4179 |
| 69 | 1.000213 | 1.002365 | 0.0000042103 | 5 | 1.0153 | 0.0000042103 | 0.8185 |
| 70 | 1.000431 | 1.002122 | 0.0000034463 | 5 |  | 0.0000034463 |  |

Таблица 17 – Метод с дроблением шага, a = 10, начальная точка (-20, 13), l = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 66 | 1.025509 | 1.273542 | 0.0557345549 | 1 | 1.3964 | 0.0557345549 | 0.3424 |
| 71 | 1.029165 | 1.162019 | 0.0190816328 | 2 | 1.3270 | 0.0190816328 | 0.3239 |
| 76 | 1.008408 | 1.090876 | 0.0061813531 | 1 | 1.2162 | 0.0061813531 | 0.3387 |
| 81 | 1.009576 | 1.053546 | 0.0020936378 | 2 | 1.2039 | 0.0020936378 | 0.3212 |
| 86 | 1.002723 | 1.029918 | 0.0006725278 | 2 | 1.1682 | 0.0006725278 | 0.3775 |
| 91 | 1.004536 | 1.016028 | 0.0002538585 | 1 | 1.1281 | 0.0002538585 | 0.2856 |
| 96 | 1.000892 | 1.009818 | 0.0000724916 | 2 | 1.1125 | 0.0000724916 | 0.3362 |
| 101 | 1.001029 | 1.005771 | 0.0000243687 | 2 | 1.1158 | 0.0000243687 | 0.3198 |
| 106 | 1.000292 | 1.003219 | 0.0000077940 | 1 | 1.0778 | 0.0000077940 | 0.4097 |
| 110 | 1.000187 | 1.002060 | 0.0000031933 | 2 |  | 0.0000031933 |  |

Таблица 18 – Метод с дроблением шага, a = 10, начальная точка (-20, 13), l = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 45 | 1.006361 | 1.080638 | 0.0050118100 | 1 | 1.1455 | 0.0050118100 | 0.4513 |
| 49 | 1.006187 | 1.055760 | 0.0022618230 | 2 | 1.1606 | 0.0022618230 | 0.4317 |
| 53 | 1.002498 | 1.035235 | 0.0009764305 | 1 | 1.1099 | 0.0009764305 | 0.4441 |
| 57 | 1.002585 | 1.024329 | 0.0004336215 | 2 | 1.1248 | 0.0004336215 | 0.4388 |
| 61 | 1.000954 | 1.015369 | 0.0001902780 | 2 | 1.0882 | 0.0001902780 | 0.4362 |
| 65 | 1.001073 | 1.010602 | 0.0000829917 | 1 | 1.1019 | 0.0000829917 | 0.4482 |
| 69 | 1.000351 | 1.006699 | 0.0000371969 | 2 | 1.0737 | 0.0000371969 | 0.4272 |
| 73 | 1.000442 | 1.004617 | 0.0000158910 | 2 | 1.0860 | 0.0000158910 | 0.4602 |
| 77 | 1.000121 | 1.002920 | 0.0000073133 | 1 | 1.0476 | 0.0000073133 | 0.5122 |
| 80 | 1.000480 | 1.002161 | 0.0000037462 | 2 |  | 0.0000037462 |  |

По результатам работы программы можно сказать, что порядок сходимости для обоих методов стремится к единице.

Значение скорости сходимости *q* у обоих методов зависит от параметра *a***,**начального приближения *P*, и от начальной длины шага *l* для метода с дроблением шага; и варьируется в диапазоне и соответственно для метода наискорейшего спуска и для метода с дроблением шага.

В среднем у метода наискорейшего спуска значение *q* ниже, также количество шагов у метода наискорейшего спуска в 2-10 раз в зависимости от параметров меньше чем у метода с дроблением шага, из этого можно сделать вывод что метод наискорейшего шага обеспечивает более быструю сходимость.

Рассмотрим, как параметры *P, a, l* влияют на скорость нахождения оптимальной точки:

* В зависимости от начальной точки *P* для обоих методов и для всех параметров *a* и начальных длин шагов, количество шагов увеличивается в несколько раз для точки, находящейся дальше от оптимальной.
* При увеличении параметра *a* для обоих методов количество шагов для нахождения минимума уменьшается при прочих равных параметрах.
* Для метода с дроблением шага увеличение начального шага *l* позволило уменьшить количество шагов для вычисления минимума, но не во всех случаях: при начальном приближении (2, 3), которое достаточно близко к оптимальной точке, и *a = 10*, когда скорость сходимости и так достаточно высокая, увеличение начального шага привело лишь к увеличению итераций для нахождения решения, соответственно и целевая функция была вычислена большее количество раз.

Ниже представлена сводная таблица результатов работы программы для обоих методов и всех вариантов параметров вычислений.

Таблица 19: сводная таблица результатов работы программы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Метод наискорейшего спуска | | Метод с дроблением шага | |
|  |  | **Порядок сходимости** | | | |
|  |  |  | |  | |
|  |  | **Скорость сходимости сходимости** | | | |
|  |  | линейная | | линейная | |
|  | | **Результат работы при *a = 0.1*** | | | |
| *P* | *l* | Количество шагов | Количество вычислений *f* | Количество шагов | Количество вычислений *f* |
| (2, 3) | 0.1 | 157 | 2559 | 1500 | 1538 |
| 1 | 157 | 2559 | 810 | 3045 |
| *(-20,13)* | 0.1 | 1100 | 14294 | 5900 | 12850 |
| 1 | 1100 | 14294 | 2701 | 15704 |
|  | | **Результат работы при *a = 1*** | | | |
| *P* | *l* | Количество шагов | Количество вычислений *f* | Количество шагов | Количество вычислений *f* |
| (2, 3) | 0.1 | 20 | 324 | 200 | 206 |
| 1 | 20 | 324 | 120 | 444 |
| *(-20,13)* | 0.1 | 60 | 873 | 620 | 1206 |
| 1 | 60 | 873 | 370 | 1961 |
|  | | **Результат работы при *a = 10*** | | | |
| *P* | *l* | Количество шагов | Количество вычислений *f* | Количество шагов | Количество вычислений *f* |
| (2, 3) | 0.1 | 10 | 147 | 60 | 91 |
| 1 | 10 | 147 | 70 | 344 |
| *(-20,13)* | 0.1 | 50 | 661 | 110 | 211 |
| 1 | 50 | 661 | 80 | 405 |

Как можно видеть методы наискорейшего спуска и метод с дроблением шага имеют одинаковый порядок сходимости примерно равный единице и линейную скорость сходимости, что и ожидалось теоретически.

Метод с дроблением шага в большинстве случаев требует меньшее количество вычислений функции, однако итераций для нахождения минимума требуется больше. Стоит также заметить, что на эффективность метода с дроблением шага помимо параметра *a* и начального приближения *P* влияет ещё и начальный размер шага *l*. В среднем оба метода достаточно эффективно решают задачу минимизации за конечное время.

**Вывод.**

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены градиентные методы решения задачи минимизации: метод наискорейшего спуска и метод с дроблением шага. Работа данных методов была проверена на различных входных данных с помощью готовой программы для решения задачи минимизации. На основе представленных результатов работы программы был проведён сравнительный анализ методов в зависимости от их входных параметров.